

Problema 1

a

La scelta delle unità di misura sugli assi coordinati consente di riscrivere la tabella nella forma:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-6	-16	-20	-18	-16	-14	-12	-10	-10	-10	-10

Utilizzando i dati riportati e i rispettivi “modelli”, si ottiene la funzione che esprime l’andamento del livello delle acque del lago:

$$f(x) = \begin{cases} a(x-2)^4 + b(x-2)^3 + c(x-2)^2 - 20 & \text{se } 0 \leq x < 3 \\ mx - 24 + \sin^2(\pi x) & \text{se } 3 \leq x \leq 7 \\ 2 \cos(2\pi x) + k & \text{se } 7 < x \leq 10 \end{cases}$$

dove $a, b, c, m, k \in \mathbb{R}$.

Si tratta di una funzione f definita a tratti, ciascuno dei quali è continuo nel rispettivo intervallo di definizione in quanto ottenuto da funzioni elementari tramite operazioni algebriche o di composizione.

I valori dei parametri restano determinati dalla soluzione del sistema:

$$\begin{cases} -6 = 16a - 8a + 4c - 20 \\ -16 = a - b + c - 20 \\ -18 = a + b + c - 20 \\ -18 = 3m - 24 \\ -10 = 2 \cos(2\pi \cdot 7) + k \end{cases}$$

$$\left(a = -\frac{1}{2}, b = -1, c = \frac{7}{2}, m = 2, k = -12 \right).$$

Dunque,

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^4 - (x-2)^3 + \frac{7}{2}(x-2)^2 - 20 & \text{se } 0 \leq x < 3 \\ 2x - 24 + \sin^2(\pi x) & \text{se } 3 \leq x \leq 7 \\ 2 \cos(2\pi x) - 12 & \text{se } 7 < x \leq 10 \end{cases}$$

b

La continuità della f in $[0; 10]$ discende dalle relazioni:

$$\lim_{x \rightarrow 3^\mp} f(x) = f(3) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 7^\mp} f(x) = f(7)$$

La derivata prima della funzione:

$$f'(x) = \begin{cases} -2(x-2)^3 - 3(x-2)^2 + 7(x-2) & \text{se } 0 \leq x < 3 \\ 2 + \pi \sin(2\pi x) & \text{se } 3 \leq x \leq 7 \\ -4\pi \sin(2\pi x) & \text{se } 7 < x \leq 10 \end{cases}$$

è discontinua in $x = 7$:

$$\lim_{x \rightarrow 7^-} f'(x) = 2 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 7^+} f'(x) = 0$$

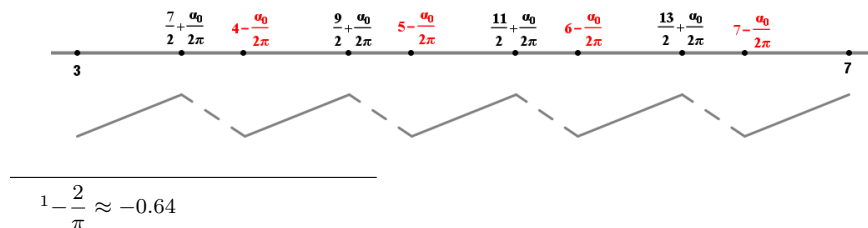
e si annulla nell'intervallo $]0; 3[$ solo per $x = 2$; infatti, dalla scomposizione $(x-2) \left[-2(x-2)^2 - 3(x-2) + 7 \right] = (x-2)(-2x^2 + 5x + 5)$ si deduce che gli altri due zeri *reali* cadono al di fuori del suddetto intervallo.

Per determinare gli zeri della f' nell'intervallo $[3; 7]$, conviene sostituire $2\pi x$ con t e risolvere l'equazione $\sin(t) = -\frac{2}{\pi}$ nell'intervallo $[6\pi; 14\pi]^1$.

È immediato constatare la presenza di 8 zeri. Indicata con $\alpha_0 \approx -0.69$ la misura in radianti di quello principale, gli zeri che appartengono all'intervallo $[3; 7]$ risultano:

$$\frac{7}{2} + \frac{|\alpha_0|}{2\pi}, 4 - \frac{|\alpha_0|}{2\pi}, \frac{9}{2} + \frac{|\alpha_0|}{2\pi}, 5 - \frac{|\alpha_0|}{2\pi}, \frac{11}{2} + \frac{|\alpha_0|}{2\pi}, 6 - \frac{|\alpha_0|}{2\pi}, \frac{13}{2} + \frac{|\alpha_0|}{2\pi}, 7 - \frac{|\alpha_0|}{2\pi}$$

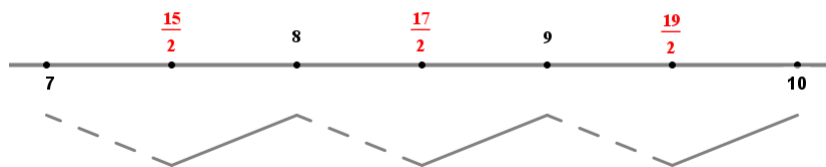
Tali valori individuano gli intervalli di monotonia della funzione f in $[3; 7]$.



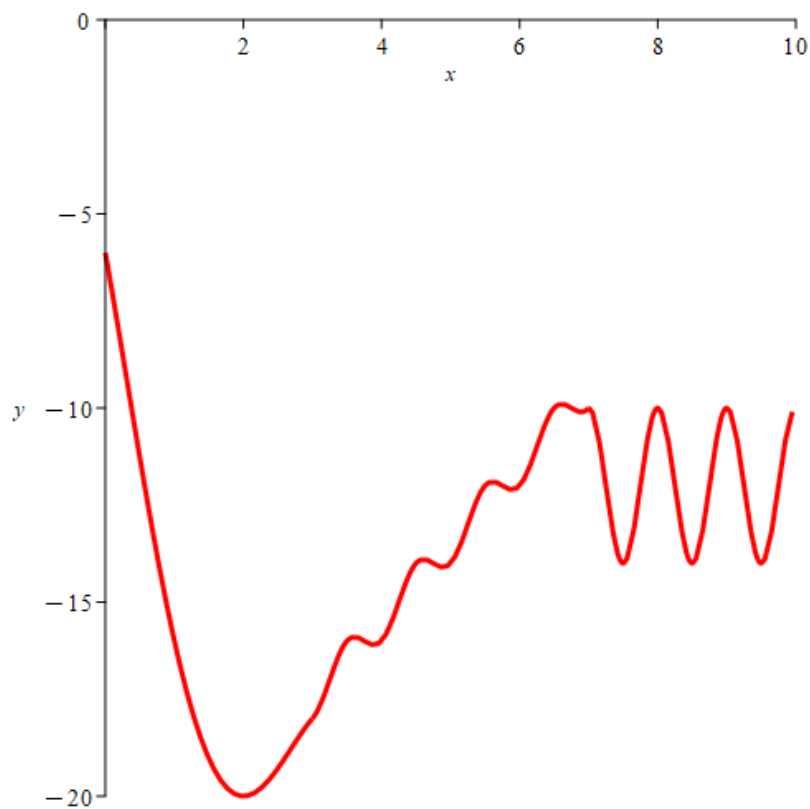
Infine, gli zeri della f' che cadono nell'intervallo $]7;10[$ sono espressi dalla relazione $x = \frac{k}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$):

$$\frac{15}{2}, 8, \frac{17}{2}, 9, \frac{19}{2}$$

e determinano l'andamento della monotonia in $]7;10]$, così come è mostrato nella figura sottostante:



I dati raccolti portano alla rappresentazione del grafico della funzione f :



c

Come si è visto, la funzione f è continua in

$$[0; 10]$$

ma non è derivabile nel punto interno $x = 7$, donde la non applicabilità del teorema di Lagrange.

La risposta alla domanda è subordinata all'esistenza di eventuali soluzioni dell'equazione $f'(s) = -\frac{2}{5}$.

La funzione $f'(s) + \frac{2}{5}$, relativa all'intervallo $I =]0; 3[$, si esprime tramite la regola:

$$-2(x-2)^3 - 3(x-2)^2 + 7(x-2) + \frac{2}{5}$$

Continua in I , questa funzione assume valori di segno opposto negli estremi per cui si annulla in almeno un punto interno (Teorema di Bolzano).

La funzione $f'(s) + \frac{2}{5}$, nell'intervallo $[3; 7]$, ammette 8 zeri, soluzioni dell'equazione:

$$\sin(t) = -12/(5 * \pi)$$

nell'intervallo $[6\pi, 14\pi]$.

Infine, nell'intervallo $]7; 10[$, la funzione $f'(s) + \frac{2}{5}$ si annulla in ulteriori 6 punti che corrispondono alle soluzioni dell'equazione:

$$\sin(t) = \frac{2}{5\pi}$$

nell'intervallo $]14\pi, 20\pi[$.

Quindi, esistono punti di ascissa $s \in]0, 10[$ tali che $f'(s) = \frac{f(10) - f(0)}{10}$.

d

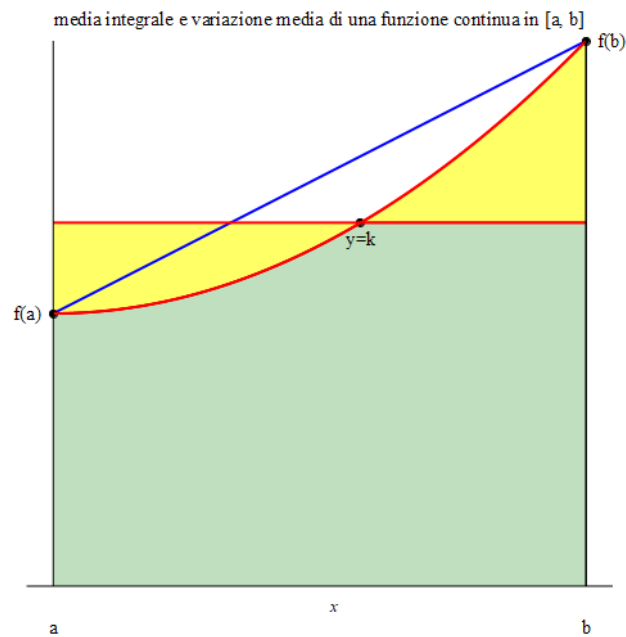
Prima di procedere è opportuno precisare il significato di media integrale e variazione media di una funzione su un intervallo $[a, b]$.

La *media integrale* rappresenta il valore k di una funzione costante tale che:

$$\int_a^b k \, dx = \int_a^b f(x) \, dx$$

La *variazione media* rappresenta il rapporto incrementale della funzione nell'intervallo:

$$\Delta f = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



La continuità della f in $[0 ; 10]$ assicura l'applicabilità del teorema della media integrale.

La differenza di volume in litri si approssima a quella di un cilindro che ha per altezza la variazione media Δh e per base la superficie del lago S :

$$\Delta V = \Delta h \times S = -0,4 \, dm \times 57 \cdot 10^8 \, dm^2 = -228 \cdot 10^7 \, l$$