

Problema 2

a

I grafici della funzione f_a si ottengono da quelli della funzione:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

per contrazione o dilazione del piano verso l'asse delle ascisse, con coefficiente $a \neq 0$. In ogni caso si suppone a positivo. Infatti, se a è negativo basta considerare la funzione opposta della f con a di nuovo positivo.

Ne consegue che gli intervalli di monotonia della f_a , in quanto non dipendono dal parametro a , sono gli stessi di quelli della funzione f , mentre cambiano i valori di massimo e minimo locali, che si invertono fra loro nel caso di a negativo. Il dominio della f_a è l'insieme $\mathbb{R} - \{1\}$, quello della g è tutto $\mathbb{R}$. Inoltre, la g è una funzione pari ($g(-x) = g(x)$) a valori non negativi, che si annulla solo per $x = 0$, punto di minimo assoluto.

La condizione $g(-x) = g(x)$ consente di limitare lo studio della funzione alla parte positiva (negativa) del dominio per poi estenderlo a quella negativa (positiva) tramite la simmetria rispetto all'asse delle ordinate.

La derivata della funzione g in $\mathbb{R}_+$:

$$g'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

presenta un massimo locale uguale a $\frac{1}{2}$ nel punto $x = 1$.

La retta r , di equazione $y = k$, essendo parallela all'asse delle ascisse, risulterà tangente al grafico γ nel suo punto di massimo locale. Dunque, $k = \frac{1}{2}$.

La derivata della funzione f_a :

$$f'_a(x) = a \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

di dominio $\mathbb{R} - \{1\}$, si annulla per $x = 0$ e $x = 2$.

La tangente al grafico della f_a , nel punto $x = 0$, coincide con l'asse delle ascisse che è una retta unita per qualsiasi contrazione o dilatazione.

Quella nel punto $x = 2$, di equazione $y = 4a$, potrà essere portata a coincidere con la retta $y = \frac{1}{2}$ se si sottopone il piano a una contrazione di coefficiente $a = \frac{1}{8}$.

b

Scritte le coordinate dei punti A e B :

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4a \end{bmatrix}$$

la distanza $d(A, B) = \sqrt{1 + \left(4a - \frac{1}{2}\right)^2}$ è minima se l'argomento della radice, che è una funzione strettamente crescente in $\mathbb{R}_+$, è minimo. A tal fine basta imporre $4a - \frac{1}{2} = 0$, donde $a = \frac{1}{8}$.

c

Le funzioni $f_{\frac{1}{8}}$ e g , ottenute combinando funzioni elementari tramite operazioni algebriche, sono continue nei rispettivi domini $\mathbb{R} - \{1\}$ ed $\mathbb{R}$.

Il comportamento della $f_{\frac{1}{8}}$ nel punto $x = 1$ di accumulazione per il dominio:

$$\lim_{x \rightarrow 1^\mp} \frac{1}{8} \frac{x^2}{x - 1} = \mp \infty$$

individua nella retta $x = 1$ un asintoto verticale sia sinistro che destro per il grafico della funzione.

La presenza di un eventuale asintoto obliquo $y = ax + b$ è subordinata alla condizione che esistano finiti, in uno o entrambi i punti $\mp \infty$ di accumulazione del dominio, i limiti:

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{\frac{1}{8}}(x)}{x} \\ b &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(f_{\frac{1}{8}}(x) - ax \right) \end{aligned}$$

Dunque, la retta di equazione:

$$y = \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}$$

è un asintoto obliquo sia a $-\infty$ che a $+\infty$.

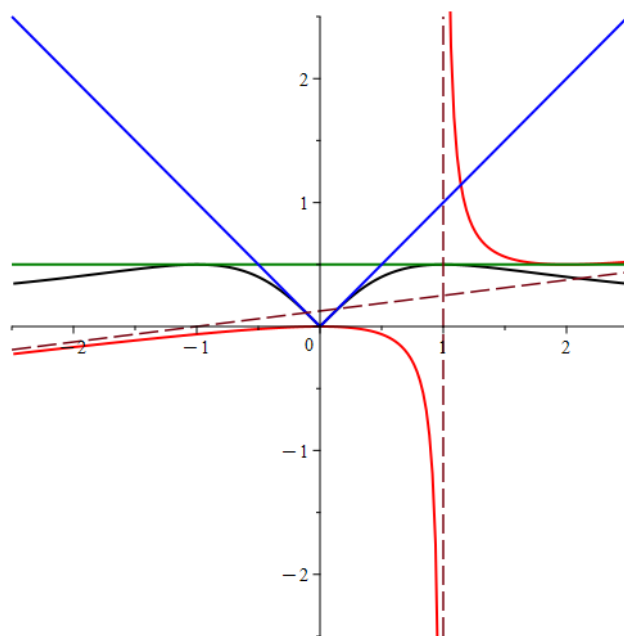
Circa il comportamento della g nel punto $+\infty$, di accumulazione per il dominio, risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

Pertanto, l'asse delle ascisse è un asintoto orizzontale per il grafico γ .

Sfruttando le considerazioni riportate al punto **a**, si può affermare:

- (1) la presenza di punti di flesso per la relazione di limite precedente;
- (2) la derivabilità della $f_{\frac{1}{8}}$ nell'insieme $\mathbb{R} - \{1\}$;
- (3) la derivabilità della g nell'insieme $\mathbb{R} - \{0\}$.



Il punto $x = 0$, che appartiene al dominio della g , si rivela un punto angoloso:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = 1$$

Le equazioni delle tangenti in questo punto sono le bisettrici del primo e del secondo quadrante:

$$y = -x \quad \text{e} \quad y = x$$

I diagrammi dei grafici delle funzioni $f_{\frac{1}{8}}$ e g mostrano che la disequazione $f_{\frac{1}{8}}(x) > g(x)$ è soddisfatta per $x > 1$.

d

Le ascisse dei punti di flesso sono da ricercare tra gli zeri della funzione $g''(x)$ in $\mathbb{R}_+$. Si ha:

$$g''(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \right) = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

Il grafico γ è concavo per $0 < x < 3$ e convesso per $x > 3$. Ne consegue che $x = \sqrt{3}$ è un punto di flesso discendente.

La simmetria rispetto all'asse delle ordinate trasforma regioni concave o convesse in regioni dello stesso tipo; γ è convesso per $x < -3$ e concavo per $-3 < x < 0$. Ne consegue che $x = -\sqrt{3}$ è un punto di flesso ascendente.

L'area della regione indicata è data dall'integrale definito¹:

$$\int_0^{\sqrt{3}} 2 \frac{x}{x^2+1} dx = [\ln(x^2+1)]_0^{\sqrt{3}} = 2 \ln(2)$$

¹ancora una volta si è sfruttata la simmetria di γ rispetto all'asse y