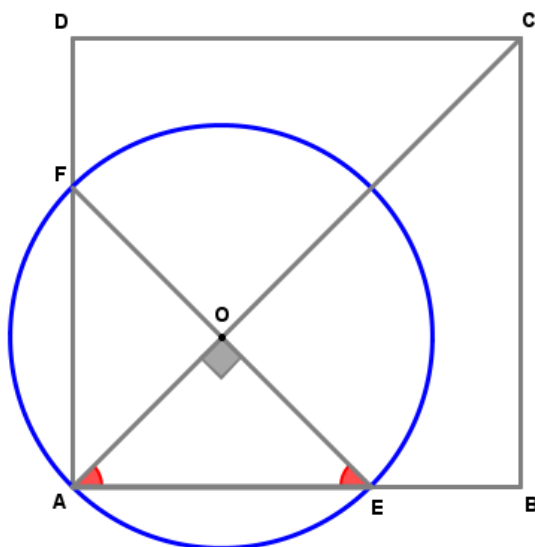


Quesiti

1

L'area del quadrato è 2 dm^2 , quella del cerchio $\frac{4}{9}\pi \text{ dm}^2$.



La parte del quadrato ricoperta dal disco è l'unione del semicerchio di diametro EF e del triangolo rettangolo AEF . L'area di questa regione:

$$\left(\frac{2}{9}\pi + \frac{4}{9}\right) \text{ dm}^2 \approx 1,14 \text{ dm}^2$$

supera la metà di quella del quadrato. Dunque, ha ragione Cecilia.

2

(a) I punti sono i vertici di un tetraedro regolare se e solo se le distanze tra tutte le coppie di punti sono uguali:

$$d(A, B) = d(A, C) = d(A, D) = d(B, C) = d(B, D) = d(C, D)$$

(b) L'equazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

rappresenta una superficie sferica di raggio:

$$r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 + \left(-\frac{c}{2}\right)^2} - d$$

e centro in $c = \left[-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right]^T$.

Poiché il centro c coincide con il baricentro g del tetraedro, si ha:

$$\begin{aligned} -\frac{a}{2} &= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = -\frac{1}{2} \\ -\frac{b}{2} &= \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} = \frac{3}{2} \\ -\frac{c}{2} &= \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Se $[x, y, z]^T$ è un punto generico del piano tangente alla sfera in A , il vettore di componenti:

$$\left[-\frac{a}{2} - 2, -\frac{b}{2} + 4, -\frac{c}{2} - 3\right]^T = \left[-\frac{5}{2}, \frac{11}{2}, -\frac{1}{2}\right]^T$$

risulta ortogonale al vettore:

$$[x - 2, y + 4, z - 3]^T$$

La relazione:

$$(*) \quad [x - 2, y + 4, z - 3]^T \bullet \left[-\frac{5}{2}, \frac{11}{2}, -\frac{1}{2}\right]^T = 0$$

determina l'equazione cartesiana del piano tangente¹:

$$5x - 11y + z - 57 = 0$$

3

Secondo la scala Richter:

$$\begin{aligned} 6,5 &= \log_{10} \left(\frac{A_1}{A_0} \right) \\ 6,0 &= \log_{10} \left(\frac{A_2}{A_0} \right) \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro si ricava:

$$0,5 = \log_{10} \left(\frac{A_1}{A_0} \right) - \log_{10} \left(\frac{A_2}{A_0} \right) = \log_{10} \left(\frac{A_1}{A_2} \right)$$

¹il segno $\bullet$ sta a indicare il prodotto scalare tra vettori

e quindi $\frac{A_1}{A_2} = \sqrt{10}$.

Dalla definizione di logaritmo e dalla legge empirica di Gutenberg-Richter, si ricava l'energia E :

$$E = E_0 \cdot 10^{1,5M+4,8}$$

La variazione percentuale dell'energia liberata tra il primo e secondo terremoto è fornita dalla relazione:

$$\Delta\% = \left(\frac{E_2}{E_1} - 1 \right) \cdot 100$$

Calcolato il rapporto tra le energie:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{E_0 \cdot 10^{1,5M_2+4,8}}{E_0 \cdot 10^{1,5M_1+4,8}} = 10^{1,5 \cdot (-0,5)} = 10^{-0,75} = \frac{1}{\sqrt[4]{1000}}$$

$$\Delta\% = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{1000}} - 1 \right) \cdot 100 \approx -82,22\%.$$

4

È immediato stabilire che $F(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Si tratta di una funzione dispari, non definita nel punto $x = 0$; la sua derivata si annulla per ogni $x \neq 0$, donde:

$$F(x) = \begin{cases} +k & \text{se } x > 0 \\ -k & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

con k numero reale positivo.

Il valore:

$$F(1) = 2 \arctan(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

corrisponde a quello della costante k per $x > 0$.

5

La funzione è pari e verrà analizzata nella parte positiva del dominio.

Il logaritmo naturale presenta un asintoto verticale sinistro di equazione:

$$x = 0$$

Dunque $\sqrt{3}$ deve annullare l'argomento del logaritmo nella funzione $y = h \ln (x^2 + k)^5$.

L'equazione $(x^2 + k)^5 = 0$ è soddisfatta per $k = -3$.

Indicato con $B = (b, 0)$ il punto di intersezione della curva con il semiasse positivo delle ascisse, sussiste l'equazione:

$$0 = 5h \ln (b^3 - 3)$$

che ha $b = 2$ per soluzione.

Calcolata la derivata della funzione:

$$y' = 10h \frac{x}{x^2 - 3}$$

la pendenza della tangente alla curva in $B = (2, 0)$ è uguale a $20h$. Si ricava per questa retta l'equazione:

$$y = 20h (x - 2)$$

Imponendo il passaggio per $C (0, -4)$, si ottiene $h = \frac{1}{10}$.

6

L'ascissa del punto P , di coordinate $[1, 0]$, corrisponde a uno zero della funzione f e quindi del polinomio $p(x)$. Quest'ultimo resta così scomposto:

$$p(x) = q(x) \cdot (x - 1)$$

La funzione f :

$$f(x) = \frac{q(x) \cdot (x - 1)}{2x + 1}$$

che ha nella retta di equazione $y = 3x - 2$ un asintoto obliquo, dovrà soddisfare le condizioni:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 3$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 3x) = -2$$

La prima:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q(x) \cdot (x - 1)}{2x^2 + x} = 3$$

impone che $q(x)$ sia del tipo $ax + b$ con il rapporto $\frac{a}{2} = 3$, donde $a = 6$.

La seconda:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(6x+b) \cdot (x-1)}{2x+1} - 3x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(b-9)x}{2x+1} = -2$$

è soddisfatta per $\frac{b-9}{2} = -2$, donde $b = 5$. Dunque,

$$p(x) = 6x^2 - x - 5$$

7

(a) Le carte vengono distribuite *10 alla volta* a ciascun giocatore.

La probabilità che la prima carta sia coppe è $\frac{10}{40}$, quella che la seconda sia coppe è $\frac{9}{39}$ e che la terza sia ancora coppe è $\frac{8}{38}$. Per il teorema della moltiplicazione, la probabilità richiesta è:

$$p = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} \cdot \frac{8}{38} = \frac{3}{247} \approx 0,0121$$

(b) Vogliamo che nelle 10 carte di Lorenzo ci siano tre assi.

Il numero di modi di scegliere 10 carte da 40 è $\binom{40}{10}$.

Se fra le 10 carte sono presenti gli assi indicati, restano da scegliere 7 carte fra le altre 37 che sono in numero di $\binom{37}{7}$. Quindi,

$$p = \frac{\binom{37}{7}}{\binom{40}{10}} = \frac{37!}{7!30!} \cdot \frac{10!30!}{40!} \approx 0,0121$$

I risultati in (a) e (b) coincidono, perché?

8

Le 4 squadre di 1^a fascia sono già assegnate ai gironi A,B,C,D in base al ranking e vi è 1 solo modo di inserirle.

Le 4 squadre di 2^a fascia possono essere distribuite nei 4 gironi etichettati A,B,C,D in $4! = 24$ modi.

Infine, si devono distribuire le 8 squadre di 3^a fascia nei 4 gironi, 2 per girone. Le prime 2 squadre del girone A possono essere scelte in $\binom{8}{2}$ modi diversi; le

due del girone B in $\binom{6}{2}$ modi diversi; quelle del girone C in $\binom{4}{2}$ modi diversi e infine le ultime 2 vanno automaticamente nel girone D in $\binom{2}{2}$ modi.

In totale si hanno:

$$\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{2}{2} \cdot \binom{2}{2} = 28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1 = 2520$$

modi diversi.

Le possibili composizioni dei gironi A, B, C, D sono complessivamente:

$$1 \cdot 24 \cdot 2520 = 60480$$